５.２.２６

令和５年度学校教育教員養成課程

（前期日程）

小学校教育専修算数科教育コース
中学校教育専修数学科教育コース

試験科目名　数学

表　紙

解答上の注意

１．試験開始後，表紙１枚，問題用紙２枚，解答用紙５枚，下書き用紙１枚があるか，確認しなさい。もし，欠落のある場合には挙手して，そのむねを申し出なさい。

２．すべての解答用紙の受験番号欄に，受験番号を忘れずに記入しなさい。

３．問題は５問あります。５問の中から４問選択し解答しなさい。
解答しない問題の解答欄には大きく ×印を付けなさい。

４．解答は該当する問題番号の解答用紙に書きなさい。解答が解答用紙の表面に書ききれない場合は裏面に続けて記入しなさい。

５．解答用紙には，解答の結果だけでなく解答の過程も記述しなさい。

６．試験終了後，解答用紙を回収します。（全５枚）
表紙を含め，問題用紙，下書き用紙は各自持ち帰りなさい。（全４枚）

令和５年度学校教育教員養成課程

（前期日程）

小学校教育専修算数科教育コース
中学校教育専修数学科教育コース

試験科目名　数学

問　題　用　紙　全２枚（その１）

問題１ 実数 a を定数とします。x，y についての連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ ax-y=4a-1 \end{cases}$$

が $x>0$ かつ $y>0$ である解をもつとき，a の値の範囲を求めなさい。

問題２ 実数全体を定義域とする関数

$$f(x)=ax^2+bx+c, \qquad g(x)=x^2+4x+3$$

に関して次の問いに答えなさい。ただし，実数 a，b，c は定数とします。

（１）「方程式 $f(x)=0$ の実数解」の定義を述べなさい。

（２）$a=c=1$ とします。命題

「実数 b が $b^2 \geqq 4$ を満たすならば方程式 $f(x)=0$ は
$x<-3$ の範囲に少なくとも１つの実数解をもつ」

の真偽を調べ，真であるならその証明を行い，偽であるなら反例をあげなさい。

（３）$a>0$，$c=\dfrac{b}{2}>0$ とします。実数全体の集合を全体集合とし，部分集合 $A=\{x|\,f(x)<0\}$，$B=\{x|\,g(x)<0\}$ を考えます。$x<-3$ の範囲に方程式 $f(x)=0$ の実数解が存在しないとします。命題

「$f(-1)f(-3)>0 \implies A\subset B$」

が真であることを証明しなさい。

問題３ 3 辺の長さがいずれも整数値であるような直角三角形について，次の問いに答えなさい。

（１）3 辺の長さはすべて異なることを証明しなさい。

（２）1 番短い辺の長さと 2 番目に短い辺の長さのうち，少なくとも一方は偶数であることを証明しなさい。

（３）1 番短い辺の長さが 5 であるとき，残りの 2 辺の長さの組をすべて求めなさい。

令和５年度学校教育教員養成課程

（前期日程）

小学校教育専修算数科教育コース
中学校教育専修数学科教育コース

試験科目名　数学

問　題　用　紙　全２枚（その２）

問題４ N，n を整数とし，$N \geqq 2$，$n \geqq 3$ とします。N 個の整数 $1, 2, ..., N$ の中から１つ選ぶ試行を $2n$ 回行い，選んだ整数を順に $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ とおくことで，変量 x, y を定めます。各試行において，$1, 2, ..., N$ のうち，どの数が選ばれることも同様に確からしいものとします。n 個のデータの組 $(x_i, y_i)\,(1 \leqq i \leqq n)$ について，次の問いに答えなさい。

（１）$x_1 = \cdots = x_{n-1} = 1,\ x_n = 2,\ y_1 = 2,\ y_2 = \cdots = y_n = 1$ のとき，x の標準偏差，y の標準偏差，x と y の共分散をそれぞれ求めなさい。

（２）x の標準偏差と y の標準偏差のうち少なくとも一方が 0 となる確率を求めなさい。

（３）「x と y の相関係数が定まり，かつ，その値が 1 である確率」は $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2N^{n-1} - 1}{N^{2n-2}}\right)$ より小さいことを証明しなさい。

問題５ 平面上に２点 A, B と円 O があり，全て平面上に固定されているとします。ただし，２点 A, B は円 O の外部にあるとします。点 A を通り円 O と２点で交わるように直線 ℓ を引き，この２つの交点を M, N とします。ここで，直線 ℓ は点 B を通らないものとします。また，点 A を通る円 O の接線の１つと円 O との接点を T とします。次の問いに答えなさい。

(１) 直線 ℓ の引き方によらず，AM・AN が一定であることを証明しなさい。

(２) ３点 B, M, N を通る円を O′ とします。AT≒AB ならば，円 O′ と直線 AB が２点で交わることを証明しなさい。

(３) AT≒AB のとき，円 O′ と直線 AB の交点のうち，点 B でないものを点 C とします。直線 ℓ の引き方によらず線分 AC の長さが一定であることを証明しなさい。